MOTO DI UN PROIETTILE.

Appunti a cura di Nicola SANTORO.

Vengono presentati, in maniera semplice, i fondamenti della balistica (nel vuoto), senza nessun riferimento goniometrico. L'unico prerequisito richiesto è la conoscenza dell'equazione cartesiana della parabola.

La "Balistica" (dal verbo greco *ballizŏ* = "io lancio", da cui deriva anche il termine *balestra*) è quella parte della Dinamica che studia il moto dei proiettili. Supponiamo di sparare un proiettile orizzontalmente o, come si direbbe se si trattasse di un cannone, con "alzo zero". Scegliamo l'asse *x* orizzontale e l'asse *y* verticale e diretto verso il basso. L'origine del riferimento è sulla punta della canna (Fig. 1). Possiamo scomporre la velocità del proiettile in una componente orizzontale (v_x) e in una verticale (v_y) e considerare il suo moto come la sovrapposizione di due moti indipendenti: uno lungo *x* e l'altro lungo *y*.

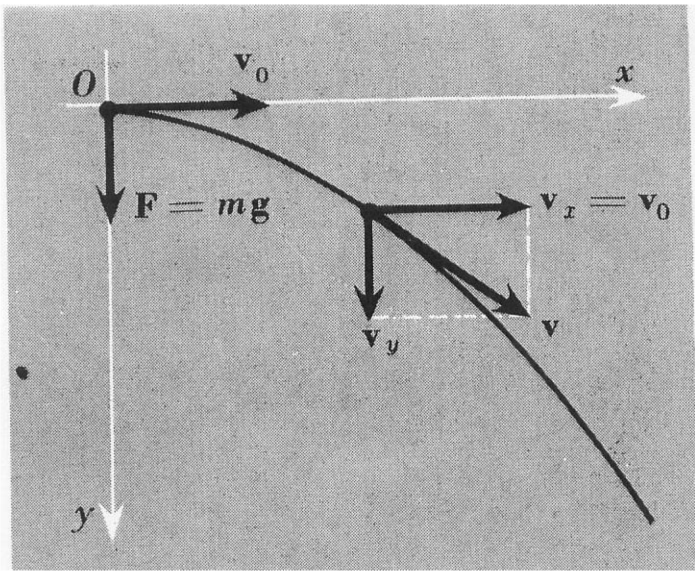

Fig. 1

Il proiettile lascia la canna all'istante $t = 0$ con una certa velocità v_0 e da questo momento in poi, se si trascura la resistenza dell'aria (è il caso di proiettili "lenti", come le frecce scoccate dall'arco o dalla balestra, o, ancora, i proiettili lanciati dalla fionda o da una catapulta: armi da tiro - tutte queste - usate in guerra, dalle antiche civiltà, prima della invenzione della polvere da sparo), agisce su esso solo la forza peso diretta come l'asse *y* e nessuna forza diretta come l'asse *x*. Quindi ad ogni istante $t > 0$:

$$v_x = v_0 = \cos t.;$$
$$v_y = gt\,.$$

Scriviamo allora due distinte leggi orarie:

$$x = v_0 t \qquad \text{moto rettilineo uniforme;}$$
$$y = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{moto rettilineo uniformemente accelerato.}$$

Ricavando t dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda otteniamo:

$$y = \frac{1}{2} g \cdot \frac{x^2}{{v_0}^2}$$

che è l'equazione (cartesiana) della traiettoria del proiettile. Si trova che la curva ottenuta è una parabola (più propriamente un arco di parabola) con vertice in O, ed è molto facile farne una costruzione grafica per punti.

Esaminiamo, adesso, il caso più generale, cioè il moto di un proiettile con velocità iniziale v_0 formante un angolo ϑ con la direzione orizzontale. Per far ciò scegliamo il sistema di assi mostrato in Fig. 2: scomponiamo la velocità in due componenti e studiamo il moto nelle due direzioni.

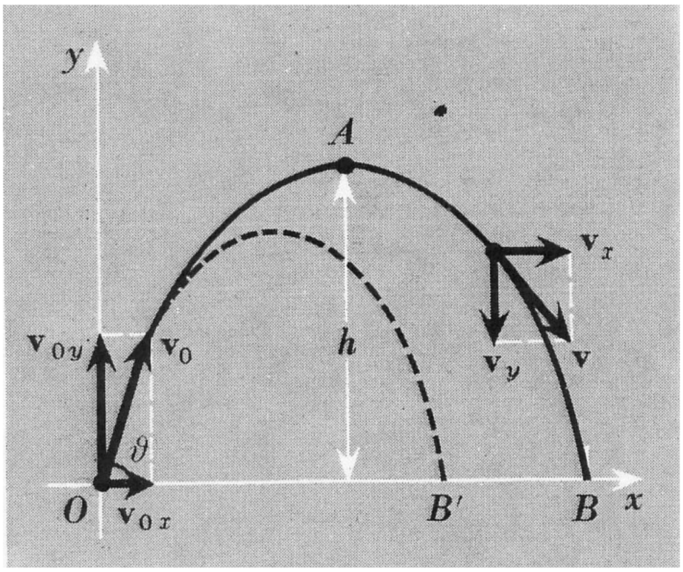

Fig. 2

Si ha immediatamente:

$$v_x = v_{0x}\,;$$
$$v_y = v_{0y} - gt\,;$$

e quindi:

$x = v_{0x} t$ moto rettilineo uniforme;

$y = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$ moto rettilineo uniformemente vario.

.

Come sopra, ricavando t dalla prima equazione e sostituendolo nella seconda si ottiene la seguente equazione (cartesiana) della traiettoria:

$$y = \frac{v_{0y}}{v_{0x}} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_{0x}^2} x^2 ;$$

che rappresenta geometricamente ancora una parabola, il cui vertice però non è più nell'origine ma nel punto *A*. L'ordinata di A è l'altezza massima *h* raggiunta dal proiettile, altezza che si può calcolare facilmente osservando che v_y si annulla in *A* per poi cambiare segno. Allora:

$$0 = v_{0y} - g t_A ;$$

da cui:

$$t_A = \frac{v_{0y}}{g} .$$

Introducendo t_A nell'espressione di *y* si ottiene:

$$h \equiv y_A = v_{0y} \left(\frac{v_{0y}}{g} \right) - \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} .$$

La "gittata" $\overline{OB}$ del proiettile si può calcolare in due modi:

1) Imponendo $y = 0$ nell'equazione della traiettoria, e risolvendo l'equazione di 2° grado in *x*: si otterranno due soluzioni, di cui una ovviamente è $x = 0$ (punto di partenza), e l'altra è x_B.
2) Osservando che il tempo impiegato per tornare al suolo ("tempo di volo") è il doppio di quello per raggiungere *A*. Quindi:

$$x_B = v_{0x} (2 t_A) = 2 \cdot \frac{v_{0x} v_{0y}}{g} .$$

La gittata dipende sia da v_{0x} che da v_{0y}, o meglio da v_0 e dall'angolo ϑ, e si potrebbe dimostrare che è massima per $\vartheta = 45°$. Se si tiene conto della resistenza dell'aria (nel caso di proiettili "veloci" sparati da bocche da fuoco), la traiettoria non è più una parabola, ma la curva tratteggiata in Fig. 2, e la gittata è minore, anzi molto minore: gli ufficiali d'artiglieria dispongono di apposite tabelle empiriche, altrimenti con i nostri calcoli non colpirebbero mai un bersaglio!